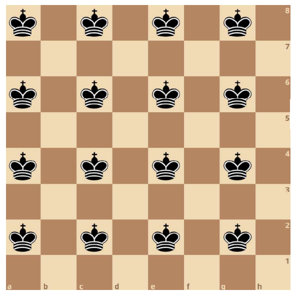
Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред - Б категорија

1. Приметимо да се ни у једном 2×2 квадрату на табли не могу наћи два краља, јер би се они тада међусобно нападали. Како таблу 8×8 можемо једноставно поделити на 16 дисјунктних квадрата димензије 2×2, и како се у сваком од њих може наћи највише један краљ, то на табли може бити највише 16 краљева. Пример са 16 краљева се може постићи као на слици испод.



2. Означимо са p исказ „Младен купује купине“. Тада је негација исказа p, тј. исказ $\neg p$ заправо исказ „Младен не купује купине“, тј. „Младен купује малине“). Такође, означимо са q исказ „Растко купује купине“, као и са r исказ „Иван купује купине“. Тада, дате реченице можемо записати као:

1° $\neg p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$.

2° $\neg q \Rightarrow (r \veebar p)$.

3° $r \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$.

Направимо одговарајућу таблицу истинитости:

p	q	r	$\neg p$	$q \Leftrightarrow r$	1°	$\neg q$	$r \veebar p$	2°	$p \Leftrightarrow r$	3°	$1^\circ \wedge 2^\circ \wedge 3^\circ$
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1

Како смо добили барем једну јединицу у последњој колони, то су дате изјаве непротивречне. Са друге стране, како немамо тачно једну јединицу у последњој колони, то не можемо за сву тројицу установити ко шта купује. Међутим, можемо видети шта је заједничко за све валуације исказа p, q и r, које дају јединицу у последњој колони. Јасно је да је у питању вредност исказа p, која је у све три варијанте једнака 1. Дакле, знамо да Младен купује купине.

3. Нека је γ угао у темену C троугла ABC. Из услова задатка је и $\sphericalangle AED = \gamma$, јер је троугао AEC једнакокраки. Означимо са F пресек правих AE и MD. Из претходног је и $\sphericalangle FED = \gamma$, јер су тачке A, F и E колинеарне. Јасно је да је троугао BDH правоугли, са правим углом у темену D, одакле заључујемо да је $MB = MH = MD$, јер је M средиште хипотенузе, тј. дужи BH, тог правоуглог троугла. Дакле, $\sphericalangle BDM = \sphericalangle MBD = 90^\circ - \gamma$. Како су тачке B, E и D колинеарне и у наведеном распореду, то је $\sphericalangle EDF = \sphericalangle EDM = \sphericalangle BDM = 90^\circ - \gamma$. Дакле, троугао EDF је правоугли са правим углом у темену F, односно, права NF, тј. права AE, је нормална на праву MD. Са друге стране, како је тачка N средиште дужи AE, а тачка D средиште дужи EC, то је дуж ND средња линија троугла AEC, одакле следи да је права ND паралелна правој AC, па је самим тим и нормална на праву BH. Дакле, важи MS је права нормална на ND. Коначно, ако посматрамо троугао MDN, видимо да су праве MS и NS, тј. MS и NF, његове висине, које се секу у тачки S. Дакле, тачка S је ортоцентар троугла MDN, одакле следи да је права DS његова трећа висина. Дакле, DS је нормално на MN.

4. Прво, приметимо да је функција $f : [0, 1) \to (0, 2]$ бијекција. При томе важи $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$, за свако $x \in [0, \frac{1}{2}]$, као и $0 < f(x) < 1$, за свако $x \in (\frac{1}{2}, 1)$.
(а) Из претходног, ако је x решење неједначине $f(x) \geqslant \frac{3}{2}$, тада је $x \in [0, \frac{1}{2}]$, па из претходног добијамо да је $f(x) = 2x + 1 \geqslant \frac{3}{2}$, тј. $x \geqslant \frac{1}{4}$. Дакле, решења неједначине су сви реални бројеви из затвореног интервала $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.
(б) Нека је $y = f(x)$, $x \in [0, 1)$. Тада је $y \in (0, 2]$, па ћемо посматрати два случаја.
1° $y \in (0, 1)$: Нађимо оно x из домена функције f за које је $f(x) = y \in (0, 1)$. Очигледно је тада $\frac{1}{2} < x < 1$, одакле је $y = f(x) = 2x - 1$, тј. $x = \frac{y+1}{2}$.
2° $y \in [1, 2]$: Одредимо сада оно x из домена функције f за које је $f(x) = y \in [1, 2]$. Јасно је да је тада $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, одакле добијамо да је $y = f(x) = 2x + 1$, тј. $x = \frac{y-1}{2}$.
Дакле, инверзна функција $f^{-1} : (0, 2] \to [0, 1)$ функције f је одређена са

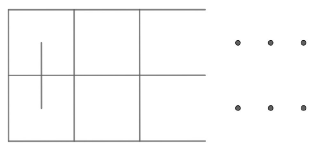
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y+1}{2}, & \text{ако је } 0 < y < 1, \\ \frac{y-1}{2}, & \text{ако је } 1 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

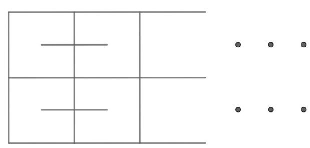
5. Видимо да је $\overline{abc} + \overline{cba} = 101(a + c) + 20b$, као и $\overline{def} + \overline{fed} = 101(d + f) + 20e$. Дакле, важи $101(a + c) + 20b = 101(d + f) + 20e$, тј. $101(a + c - d - f) = 20(e - b)$, $a \cdot c \cdot d \cdot f \neq 0$. Из претходне једнакости видимо да број 101 мора да дели $20(b - e)$. Међутим, број 101 је прост и не дели 20, одакле закључујемо да 101 мора да дели $b - e$. Како је овај број између -9 и 9 (у питању су цифре), тада та разлика мора бити 0, као једини број у том опсегу који је дељив са 101. Дакле, $b = e$ (као и $a + c = d + f$).

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред - Б категорија

1. Представимо сто као таблу димензије 2×15. Приметимо да два места једно до другог или једно преко пута другог у поставци задатка заправо одговарају домини димензије 1×2 на посматраној табли. Зато ћемо прво пребројати број начина да поменуту таблу поплочамо доминама, које нам сада представљају парове. Ако са a_n означимо број начина да таблу $2 \times n$ поплочамо доминама, лако добијамо да за $n \geqslant 3$ важи $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Заиста, доње лево поље можемо поплочати усправном домином, одакле, постављајући је, смо таблу смањили на таблу димензије $2 \times (n-1)$, или хоризонталном, одакле следи да у том случају и изнад ње мора стајати хоризонтална домина, па смо таблу заправо смањили на таблу димензије $2 \times (n-2)$ (слика). Како је $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$, што је тривијално, лако рачунамо да је $a_{15} = 987$. Пошто сада у сваку домину можемо распоредити мужа и жену на два начина (није битно ко је у ком пољу које је домина покрила) - на 2^{15} начина, а и парове можемо распоредити на било који начин (није битно ком пару одговара која домина) - на 15! начина, добијамо коначно решење $987 \cdot 2^{15} \cdot 15!$.





2. Нека је $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = cx^2 + bx + a$, за свако $x \in \mathbb{R}$. С обзиром да је функција f позитивна за све реалне бројеве x, специјално важи $c = f(0) > 0$. Разликујемо следеће случајеве:
1° $a = 0$: Уколико је $b \neq 0$, онда је $f(-\frac{c}{b}) = 0$, што је у супротности са условом. Дакле, ако је $a = 0$, онда је и $b = 0$. Како је $c > 0$, онда је заиста $g(x) = cx^2 \geqslant 0$, за свако $x \in \mathbb{R}$.
2° $a \neq 0$: Из услова позитивности квадратне функције f, за свако $x \in \mathbb{R}$, имамо да је $D_f = b^2 - 4ac < 0$. Због $c > 0$ имамо да је g квадратна функција, а њена дискриминанта је $D_g = b^2 - 4ca = D_f < 0$. Дакле, g је квадратна функција која је конвексна (због $c > 0$) и чија је дискриминанта мања од нуле. Зато је функција g строго позитивна за све реалне бројеве, те важи и неједнакост $g(x) \geqslant 0$.

3. Уочимо тачку C_1 на полуправој DC, са почетком у тачки D, такву да је $DC_1 = AX$. Уколико се тачка C_1 поклапа са тачком C, онда су углови $\sphericalangle ADX, \sphericalangle DXC$ и $\sphericalangle XCB$ углови са паралелним крацима, те су њихове симетрале паралелне. Размотримо, сада, случајеве када се тачке C_1 и C не поклапају. Како се из тачака C_1 и C дуж XB види под једнаким угловима, при чему су поменуте тачке са исте стране праве XB, закључујемо да тачке X, B, C_1 и C припадају једној кружници. Нека је p симетрала дужи AB, $\alpha = \sphericalangle DAB$ и $\beta = \sphericalangle CBA$. Уколико је тачка C_1 између тачака D и C, имамо да је $\sphericalangle XC_1C = 180^\circ - \alpha$ (јер је четвороугао AXC_1D паралелограм), док, због тетивности четвороугла $XBCC_1$, важи и $\sphericalangle XC_1C + \beta = 180°$. Зато је $\alpha = \beta$, односно трапез $ABCD$ је једнакокрак. У случају да важи распоред тачака $D - C - C_1$, због тетивности је $\beta = \sphericalangle XC_1C$, као и $\sphericalangle XC_1C = \alpha$ (јер је четвороугао AXC_1D паралелограм), те је и у овом случају $ABCD$ једнакокраки трапез. Како су сада симетрале углова $\sphericalangle ADX$ и $\sphericalangle XCB$ симетричне у односу на праву p, која је уједно и симетрала угла $\sphericalangle DXC$, то се оне секу на p или су паралелне са p.

4. Како је CE тежишна дуж, то је $AE = EB$, те како је $ED \perp AB$, то је троугао ABD једнакокрак. Дакле, $AD = BD$ и $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC$, одакле следи да је $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BAC$ (спољашњи угао троугла је једнак збиру два несуседна унутрашња угла тог троугла). Стога, троуглови ABC и DAC су слични. Одавде је $AD : AB = CD : AC = AC : BC$, тј. $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$ и $CD = \frac{AC^2}{BC}$. Даље имамо да је $BC = BD + CD = AD + CD = \frac{AB \cdot AC + AC^2}{BC}$, тј. $AB \cdot AC = BC^2 - AC^2$. Како је F подножје нормале из тачке C на праву AB, то је $AC^2 = AF^2 + CF^2$, па је $BC^2 = CF^2 + BF^2 = CF^2 + (AB - AF)^2 = CF^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AF + AF^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AF$, одакле следи $AB \cdot AC = BC^2 - AC^2 = AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AF$, тј. $AC = AB - 2AF$, одакле следи тврђење.

5. Како је $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, то је $2024^n = 2^{3n} \cdot 11^n \cdot 23^n$, одакле закључујемо да је укупан број природних делилаца броја 2024^n једнак $(3n+1)(n+1)(n+1) = (3n+1)(n+1)^2 = 160$. Одредимо природан број n, који задовољава претходну једначину. Како је $(3n+1)(n+1)^2 = 3n^3 + 7n^2 + 5n + 1 > 3n^3 > 3 \cdot 64 > 160$, за $n \geqslant 4$, то је довољно испитати да ли постоји решење за $n = 1$, $n = 2$ или $n = 3$. Тривијално се проверава да $n = 3$ јесте решење.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред - Б категорија

1. Приметимо да је

$$\begin{aligned}\sin\alpha-\cos\alpha &= 2023(\sin\beta\sin\gamma-\cos\beta\cos\gamma)\\ &= -2023\cos(\beta+\gamma).\end{aligned}$$

Из троугла $\triangle ABC$ имамо да је $\alpha=\pi-\beta-\gamma$. Заменом у претходни израз добијамо

$$\sin\alpha-\cos\alpha=-2023\cos(\pi-\alpha)=2023\cos\alpha.$$

Коначно, заменом добијамо да је $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{2024\cos\alpha}{\cos\alpha}=2024$, те је

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}=4096576.$$

2. Уколико се тачке X и Y поклапају, свакако леже на кругу са A и D. Претпоставимо зато да су X и Y различите. Претпоставимо да праве BC и AD нису паралелне и нека је E њихов пресек. Без умањења општости можемо претпоставити да су распореди тачака $E-D-A$ и $E-C-B$. Тада је X центар уписане кружнице троугла EAB, па се налази на симетрали унутрашњег угла код темена E тог троугла. Слично је Y центар споља приписане кружнице наспрам темена E троугла EDC, па се и Y налази на симетрали унутрашњег угла код темена E тог троугла, односно E,X,Y су колинеарне тачке. Нека је $\sphericalangle A=2\alpha$, $\sphericalangle D=2\beta$. Тада, једноставним рачуном углова налазимо:

$$\sphericalangle AXY=\sphericalangle AEX+\sphericalangle EAX=\alpha+\frac{1}{2}\sphericalangle AEB=$$

$$=\alpha+\frac{1}{2}(180^\circ-2\alpha-(180^\circ-2\beta))=\alpha+(\beta-\alpha)=\beta=\sphericalangle ADY,$$

одакле закључујемо да је четвороугао $DAXY$ заиста тетиван. Када су праве AD и BC паралелне, четвороугао $ABCD$ је једнакокраки трапез, па је и $DAXY$ једнакокраки трапез, односно тетиван четвороугао.

3. (а) Претпоставимо да је један ученик пријатељ са свима (остали могу да се пре журке не познају), тј. са осталих $n-1$ особа. Тада ће сви након журке бити пријатељи, што нам даје $n-1$ пријатељстава у овом случају. Са друге стране, претпоставимо да је минималан број пријатељстава, који је потребан да би важио услов у делу (а), једнак m, $m\leqslant n-1$, тада, ако би сваки ученик пре журке био пријатељ са барем два друга ученика, тада би укупан број пријатељстава на почетку био барем n, што не може. Стога, постоји ученик који је пре журке имао највише једног пријатеља. Уколико он није имао пријатеља уопште, тада на журци неће упознати никог, што је немогуће. Дакле, он мора имати тачно једног пријатеља пре журке. Коначно, да би он био пријатељ са свим ученицима након журке, тада ученик којег је једино познавао пре журке мора бити пријатељ са свим осталим оченицима пре журке. Дакле, m је барем $n-2+1=n-1$. Стога, минималан број пријатељстава је $n-1$ у овом случају.
(б) Докажим да је у овом случају максималан број пријатељстава на почетку једнак $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Претпоставимо да неки ученик није пријатељ ни са једним од ученика на

почетку, тј. пре журке, те да се сви остали (остало их је $n-1$) међусобно познају. Тада, након журке, тај ученик и било који други неће бити пријатељи, а број пријатељстава је управо $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Да би након журке нека два ученика, рецимо ученици A и B, и даље остали неупознати, тј. нису постали пријатељи, тада конфигурација пријатељстава на почетку мора изгледати тако да за сваког ученика C, $C \neq A$, $C \neq B$, у троуглу ABC мора недостајати „страница“ AB (јер нису пријатељи) и барем једна од „страница“ BC или CA (могу и обе). Како различитих троуглова облика ABC имамо $n-2$, те како се из сваког избацује барем једна страница различита од AB, као и сама страница AB, то је укупан број пријатељстава пре журке највише $\frac{n(n-1)}{2}-(n-2+1)=\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Дакле, максималан број пријатељстава је $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ у овом случају.

4. Нека је $a=13$ и $\alpha=120^\circ$. Претпоставимо, без умањења општости, да је $b \geqslant c$. Тада, на основу косинусне теореме, важи

$$13^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha=b^2+c^2+bc=(b-c)^2+3bc.$$

Вредност за $b-c$ може да буде било која из скупа $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, јер је a најдужа (остале су строго мање) страница полазног троугла (наспрам ње је туп угао). Ако је $b-c=1$, тада је $bc=56$, одакле заменом налазимо да је $b=c+1$, одакле је $0=c^2+c-56=(c+8)(c-7)$, што даје решење $b=8$ и $c=7$. Аналогно се проверавају сви остали случајеви из којих добијамо да не постоји други троугао који испуњава дате услове (неки случајеви могу лако да се одбаце, посматрањем по модулу 3 или модулу 5). Према томе, површина троугла је

$$P=\frac{bc\sin\alpha}{2}=14\sqrt{3}.$$

5. Очигледно је $2^{3^{2024}} \equiv 0 \pmod 4$, док је $3^{2024}=3^{2\cdot 1012}=(3^2)^{1012}=9^{1012}\equiv 1 \pmod 4$, као и $3^{2024}=3^{4\cdot 506}=(3^4)^{506}=81^{506}\equiv 1 \pmod 5$. Очигледно је и $3^{2024}=81^{506}\equiv 1 \pmod{20}$, тј. $3^{2024}=20a+1$, за неки природан број a, одакле следи да је $2^{3^{2024}}=2^{20a+1}=2\cdot 2^{20a}=2\cdot(2^{10})^{2a}=2\cdot(1024)^{2a}\equiv 2 \pmod{25}$, јер је $2a$ паран. Дакле, број $2^{3^{2024}}$ је облика $25b+2$, за неко (велико) природно b, тј. $2^{3^{2024}}=25b+2$ и дељив је са 4. Стога, b не може давати остатке 0, 1 или 3 при дељењу са 4, већ искључиво 2. Следи $2^{3^{2024}}=25b+2\equiv 52 \pmod{100}$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
Четврти разред - Б категорија

1. Нека су решења дате јадначине означена са a, $b = a + d$ и $c = b + d$. Како они чине аритметичку прогресију, имамо да је $a + c = 2b$, што са Виетовом формулом $a + b + c = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{-63}{9} = 7$ даје $b = \frac{7}{3}$. Из Виетове формуле $a \cdot b \cdot c = -\frac{a_0}{a_3} = -\frac{-56}{9} = \frac{56}{9}$, како је $b = \frac{7}{3}$, добијамо да је $a \cdot c = \frac{8}{3}$. Како они чине аритметичку прогресију, имамо да је $a = b - d$, а $c = b + d$, одакле добијамо да је $(\frac{7}{3} - d) \cdot (\frac{7}{3} + d) = \frac{8}{3}$, тј. $\frac{49}{9} - d^2 = \frac{8}{3}$, те је $d = \frac{5}{3}$. Дакле, решења су: $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{7}{3}$ и $c = 4$.

2. Нека ја A вредност траженог израза. Ставимо да је $B = \operatorname{tg} \alpha$. Приметимо да је

$$\begin{aligned} \sin\alpha - \cos\alpha &= 2023(\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma) \\ &= -2023\cos(\beta+\gamma). \end{aligned}$$

Из троугла ABC имамо да је $\alpha = \pi - \beta - \gamma$. Заменом у претходни израз добијамо

$$\sin\alpha - \cos\alpha = -2023\cos(\pi - \alpha) = 2023\cos\alpha,$$

одакле налазимо да је $B = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2024\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2024$.
Међутим, срећивањем траженог израза, тј. извлачењем једног члана из сваког од сабирака у бројиоцу, након множења бројиоца и имениоца са B^{2023} ($B \neq 0$), лако налазимо да се исти своди на

$$A = \frac{B(1 + B + \ldots + B^{2022})B^{2023}}{B^{2023}(\frac{1}{B} + \frac{1}{B^2} + \ldots + \frac{1}{B^{2023}})} = \frac{B^{2024}(1 + B + \ldots + B^{2022})}{B^{2022} + B^{2021} + \ldots + B + 1} = B^{2024}.$$

Дакле, $A = 2024^{2024}$.

3. Раздвајаћемо случајеве у зависности од тројке могућих дужина декадног записа бројева за дан, месец и годину, тако да је за 12.12.1212. одговарајућа тројка $(2, 2, 4)$. Писаћемо у наставку x за прву, а y за другу цифру прекрасности датума (које јединствено одређују датум дате тројке).

- $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$ и $(1, 1, 3)$: Година је свакако пре тренутне, тако да за цифру дана и месеца одговара било која цифра осим нуле, што даје $9 \cdot 9 = 81$ датума за дату дузину године, односно $3 \cdot 81 = 243$ укупно.

- $(1, 1, 4)$: Овог пута имамо ограничење на години, а датум је облика $x.y.xyxy.$. Јасно је $0 < x < 3$, а када би било 2, y би морало бити 0, шо није могуће. Према томе, $x = 1$, и тада на y нема ограничења осим $y > 0$, што даје $1 \cdot 9 = 9$ датума.

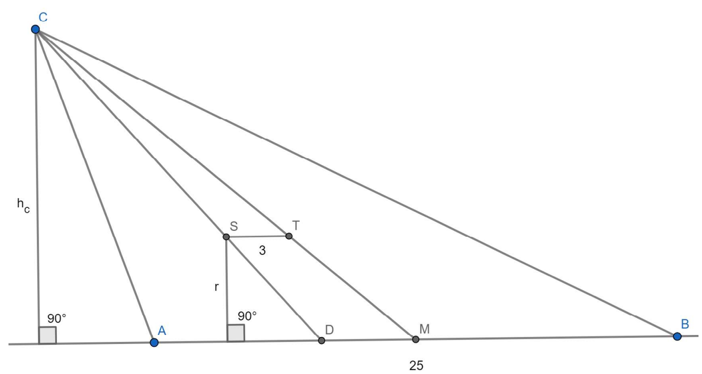
- $(1, 2, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$: Када год је месец дужине 2, једине могуће вредности су 10, 11 и 12, па је $y = 1$. Притом x није 0, што оставља две могућности за x и према томе два датума за дату дужину године, односно $4 \cdot 2 = 8$ укупно. Приметимо да у последњем случају $y = 1$ даје свакако датум из прошлог миленијума, па је избор x слободан.

- $(2, 1, 1)$ и $(2, 1, 3)$: Могуће вредности за x су 1, 2 и 3. Када је $x = 1$, y може узети било коју вредност сем нуле, па имамо девет могућности. Када је $x = 2$, закључујемо да је у питању фебруар одређене године, па свакако имамо 8 могућности за y. Ипак, када би y било 9, у питању би била 9. или 929. година која није преступна, па ово и није могуће. Коначно, за $x = 3$, у питању је март, а како y није нула, y може бити само 1. Укупно у овом случају имамо $2 \cdot (9 + 8 + 1) = 36$ запањујућих датума.

- $(2, 1, 2)$: Исто као малопре, уз ту разлику да је овог пута $x = 2$, $y = 9$ могуће јер је одговарајући датум 29.2.92., а 92. година је била преступна, па овде имамо $9 + 9 + 1 = 19$ запањујућих датума.
- $(2, 1, 4)$: Сада морамо пазити на ограничење да је година највише 2024. Тако је 1 једина могућност за y, док је x због броја дана ограничено на 1, 2 и 3, тј. укупно 3 датума.
- $(2, 2, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$ и $(2, 2, 4)$: Због месеца је x нужно 1, па за y остају могућности $0, 1, 2$, што даје $4 \cdot 3 = 12$ запањујућих датума. Приметимо да је у овом случају $y = 0$ могуће јер се нигде не појављује као прва цифра.

Закључујемо да је у Новој Ери до данас било тачно 330 запањујућих датума.

4. Означимо са D пресек правих CS и AB, а са M средиште дужи AB. Како су праве ST и AB паралелне, а тежиште се налази на $\frac{2}{3}$ тежишне дужи CM, по Талесовој теореми је $DM = 4.5$. Како је M средиште AB лако рачунамо $AD = 8$ и $BD = 17$, а како је CD симетрала угла $\angle ACB$, знамо да је $\frac{CA}{CB} = \frac{AD}{BD} = \frac{8}{17}$. Означимо сада са r полупречник уписане кружнице троугла ABC, са c дужину странице AB, са h_c дужину висине овог троугла из темена C, са s његов полуобим, а са P његову површину. Због паралелности правих ST и AB знамо да је $r = \frac{h_c}{3}$. Како је $P = \frac{c \cdot h_c}{2} = r \cdot s$, из претходних веза добијамо $s = \frac{3}{2}c$, односно $CA + CB = 50$. Како већ имамо $\frac{CA}{CB} = \frac{8}{17}$, закључујемо да је $CA = 16$ и $CB = 34$.



5. Из $p \geqslant 2$ добјамо да је $2^{11} = 2048 > 2024 > p^{q^r} \geqslant 2^{q^r}$, те је $10 \geqslant q^r$. Стога, $q \leqslant 2$ и $2^4 > 10 \geqslant 2^r$, одакле добијамо да је $r \leqslant 3$. Ако је $p > 3$, тада важи $2187 = 3^7 > 2024 > p^{q^r} > 3^{q^r}$, те је $2^3 > 7 > q^r \geqslant 2^r$. Следи, $3 > r$, тј. $r = 2$, па је $q^2 < 7$, тј. $q = 2$. Одавде је $p^{2^2} + 2^2 + 2 = 2024$, тј. $p^4 + 6 = 2024$, тј. $p^4 = 2018$,што је немогуће. Дакле, мра важити $p = 2$. Стога, q^r не може бити 10, па је $2024 \leqslant 2^9 + q^r + r \leqslant 512 + 10 + 3 = 525$, што је, такође, немогуће. Дакле, једначина нема решења у скупу $\mathcal{P}$.